

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

از اینکه A متناهی و $A \cup B$ نامتناهی است نتیجه می‌شود B و A' نامتناهی می‌باشند.

بررسی گزینه‌ها:

- ۱ B نامتناهی و A متناهی است، بنابراین $B - A$ یا همان $B \cap A'$ نامتناهی است. پس گزینه ۱ درست است.
- ۲ B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، در نتیجه $A \cup B'$ نیز ممکن است نامتناهی باشد. پس گزینه ۲ نادرست است.
- ۳ A متناهی است، در نتیجه $B \cap A$ یا همان $B - A'$ متناهی است. بنابراین گزینه ۳ درست است.
- ۴ A' نامتناهی است، بنابراین $A' \cup B'$ نیز نامتناهی است. پس گزینه ۴ درست است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$C - A = \{2\} \quad \checkmark$$

تمامی اعداد فرد مضرب ۳ در $A - C$ قرار دارند که نامتناهی است.

$$A \cup C = \{2, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$B - (A \cup C) = \{4, 6, 8, 10, \dots\} \Rightarrow \text{نامتناهی}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \text{متناهی}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$t_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} t_7 = 7a + b = 1 \\ t_9 = 9a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow t_9 - t_7 = 2a = 8 \Rightarrow a = 4, b = -27$$

$$t_{10} = 10a + b = 40 - 27 = 13$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

میزان پول شهرام در پایان هر سال به صورت دنباله هندسی مقابل است.

$$160, 160\left(\frac{3}{4}\right), 160\left(\frac{3}{4}\right)^2, \dots$$

پول شهرام پس از n سال برابر $160\left(\frac{3}{4}\right)^n$ می‌باشد. اگر او یک میلیارد و ۵۵ میلیون سود کرده باشد، یعنی پس از n سال $(1055 + 160)$ میلیون، یعنی ۱ میلیارد و ۲۱۵ میلیون خواهد داشت.

$$160\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1215 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1215}{160} = \frac{243}{32} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \Rightarrow n = 5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: الگوهایی که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است را الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

تعداد نقاط هر یک از گزینه‌ها برابر است با:

$$\text{گزینه ۱: } 5, 12, 21, \dots$$

$$\text{گزینه ۲: } 1, 5, 13, \dots$$

$$\text{گزینه ۳: } 1, 6, 15, \dots$$

$$\text{گزینه ۴: } 4, 8, 12, \dots$$

تنها در گزینه ۴، اختلاف بین جملات متوالی مقداری ثابت است. در واقع جمله عمومی دنباله گزینه ۴ به صورت $a_n = 4n$ می‌باشد که یک الگوی خطی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d ، به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

راه حل اول:

با توجه به نکته داریم:

$$\begin{cases} t_3 = 20 \Rightarrow t_1 + 2d = 20 \\ t_7 = 56 \Rightarrow t_1 + 6d = 56 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 4d = 36 \Rightarrow d = 9$$

راه حل دوم:

نکته: با توجه به شکل روبه رو داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} & +d & +d & +d & & & \\ & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & & & \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & & & \end{array} \quad t_m - t_n = (m-n)d$$

با توجه به نکته فوق داریم:

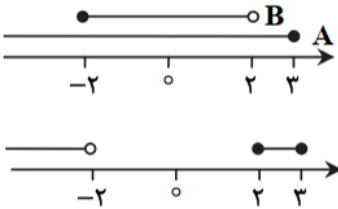
$$t_7 - t_3 = 4d \Rightarrow 56 - 20 = 4d \Rightarrow 36 = 4d \Rightarrow d = 9$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته (تفاضل دو مجموعه): مجموعه $A - B$ (A منهای B) مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A هستند؛ ولی عضو مجموعه B نیستند.

با توجه به محور روبه رو، مجموعه $A - B$ برابر است با: $A - B = (-\infty, -2) \cup [2, 3]$

اگر حاصل را روی محور نشان دهیم، به صورت زیر خواهد بود:

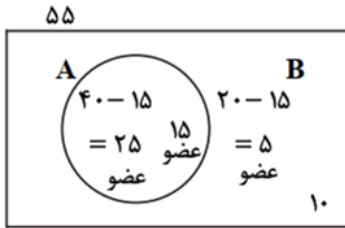


(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

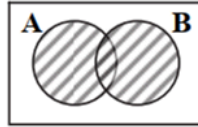
نکته : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

نکته : $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

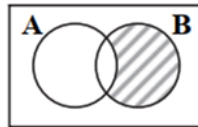
به کمک نمودار زیر، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



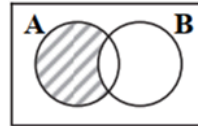
گزینه ۱ $n(A \cup B) = ۲۵ + ۱۵ + ۵ = ۴۵$ ✗



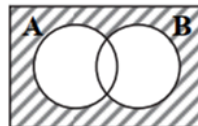
گزینه ۲ $n(B \cap A') = n(B - A) = ۵$ ✗



گزینه ۳ $n(A \cap B') = n(A - B) = ۲۵$ ✗



گزینه ۴ $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = ۱۰$ ✓



بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته : $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$

نکته : $A - B = A \cap B'$



$$A \subset B' \Rightarrow A \cap B' = A$$

$$\Rightarrow A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

پس A و B دو مجموعه جدا از هم هستند، بنابراین گزینه ۳ نادرست است.

(دقت کنید که $B - A = B$)

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

نکته: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

راه حل اول:

اگر مجموعه‌های R و T به ترتیب علاقه‌مندان به رشته ریاضی و تجربی باشند، داریم:

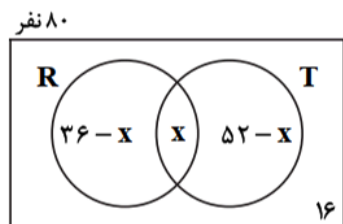
$$n(R \cup T) = 80 - 16 = 64 = \text{تعداد افراد علاقه‌مند به حداقل یک رشته}$$

$$n(R \cup T) = n(R) + n(T) - n(R \cap T) \Rightarrow 64 = 36 + 52 - n(R \cap T) \Rightarrow n(R \cap T) = 24$$

$$n(T - R) = n(T) - n(T \cap R) = 52 - 24 = 28 = \text{تعداد علاقه‌مندان فقط به رشته تجربی}$$

راه حل دوم:

اگر x نفر علاقه‌مند به هر دو رشته باشند، با توجه به نمودار داریم:



$$36 - x + x + 52 - x + 16 = 80 \Rightarrow x = 24$$

$$\text{تعداد علاقه‌مندان فقط به رشته تجربی} = 52 - x = 52 - 24 = 28$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: اگر U مجموعه مرجع و A' متمم مجموعه A باشد، آنگاه: $n(A) + n(A') = n(U)$

نکته: اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

راه حل اول:

مجموعه افرادی را که کتاب می‌خوانند، مجموعه A و افرادی را که مجله می‌خوانند، با مجموعه B نمایش می‌دهیم و تعداد افرادی را که هم کتاب می‌خوانند و هم مجله، با x نمایش می‌دهیم:

$$n(A) = 30, n(B) = 10, n(A \cap B) = x$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 30 + 10 - x = 40 - x$$

تعداد افرادی که مطالعه نمی‌کنند برابر $5x$ است. بنابراین با توجه به اینکه افراد حاضر در کتابخانه ۶۰ نفر هستند، داریم:

$$n(A \cup B)' = 5x \quad n(A \cup B) = 40 - x$$

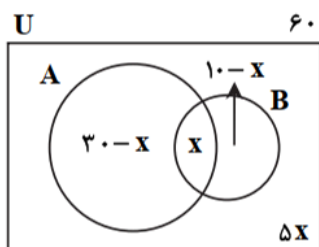
$$n(A \cup B)' + n(A \cup B) = 60 \Rightarrow 5x + 40 - x = 60 \Rightarrow x = 5$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 30 - 5 = 25 \quad \xrightarrow{(+)} \quad 25 + 5 = 30$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 5 = 5$$

راه حل دوم:

با استفاده از نمودار ون:



$$(30 - x) + (10 - x) + x + 5x = 60 \Rightarrow x = 5$$

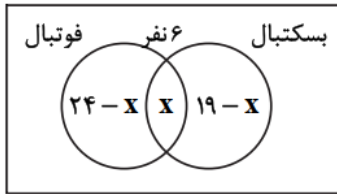
$$\text{فقط کتاب: } 30 - x = 25 \quad \xrightarrow{(+)} \quad 30$$

$$\text{فقط مجله: } 10 - x = 5$$

۳۰ نفر فقط کتاب یا فقط مجله می‌خوانند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲



اگر تعداد نفراتی را که هم فوتبال بازی می کنند و هم بسکتبال، X در نظر بگیریم، با توجه به نمودار روبه رو خواهیم داشت:

$$(24 - X) + X + (19 - X) = 45 - 6 \Rightarrow 43 - X = 39 \Rightarrow X = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

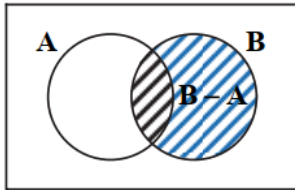
نکته: $A - B = A \cap B'$

۱۳

ابتدا داریم:

$$B - (A' \cap B) = B - (B \cap A') = B - (B - A)$$

پس باید از عضوهای مجموعه B ، اعضای مجموعه $B - A$ را برداریم. با رسم نمودار ون داریم:



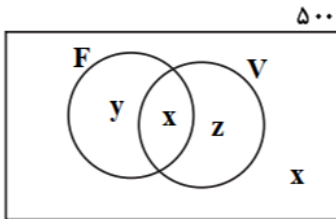
$$\Rightarrow B - (B - A) = A \cap B$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

نکته: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

اگر X تعداد افراد علاقه مند به هر دو رشته و Y و Z به ترتیب علاقه مندان فقط به فوتبال و فقط به والیبال باشند، با توجه به نمودار ون زیر داریم:



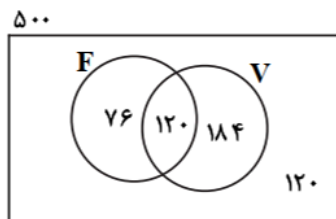
$$y = \frac{1}{4}(x + z) \Rightarrow 4y = x + z$$

$$y + \underbrace{x + z}_{4y} + x = 500 \Rightarrow 5y + x = 500$$

بنابراین می توان نوشت:

$$x = 500 - 5y \Rightarrow x = 5(100 - y)$$

$y \in \mathbb{N}$ ، پس x مضرب ۵ است و با توجه به گزینه ها، فقط $x = 120$ قابل قبول است؛ یعنی نمودار ون به صورت زیر است:



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۵

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

ابتدا جملات دوم و ششم دنباله هندسی داده شده را به دست می آوریم:

$$a_n = 12 \times 2^{2-n} \Rightarrow \begin{cases} n=2 \Rightarrow a_2 = 12 \times 2^0 = 12 \\ n=6 \Rightarrow a_6 = 12 \times 2^{-4} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

اکنون بین دو عدد ۱۲ و $\frac{3}{4}$ ، چهار جمله قرار می دهیم به طوری که ۶ جمله حاصل، دنباله حسابی تشکیل دهند؛ بنابراین:

$$\frac{3}{4}, -, -, -, -, 12 \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} t_1 = \frac{3}{4}, t_6 = 12$$

$$t_6 = t_1 + 5d \Rightarrow 12 = \frac{3}{4} + 5d \Rightarrow d = \frac{12 - \frac{3}{4}}{5} = \frac{9}{4}$$

با جمع هر جمله با $d = \frac{9}{4}$ ، جمله بعدی را به دست می آوریم:

$$\frac{3}{4}, \frac{12}{4}, \frac{21}{4}, \frac{30}{4}, \frac{39}{4}, 12$$

پس مجموع واسطه های درج شده برابر است با:

$$\frac{12}{4} + \frac{21}{4} + \frac{30}{4} + \frac{39}{4} = \frac{102}{4} = 25.5$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\text{نکته: } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad , \quad n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نکته می توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 25 + 15 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(B - A) = 15 - 10 = 5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۶

ابتدا مجموعه A را به صورت بازه می نویسیم:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 4\} = (-1, 4]$$

بنابراین:

$$A - B = (-1, 4] - (-\infty, 2] = (2, 4]$$

در این بازه دو عدد طبیعی ۳ و ۴ وجود دارند.

۱۷

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۸

سرنخ

کلید حل مسئله استفاده از جمله عمومی دنباله حسابی ($a_n = a_1 + (n-1)d$) است. جملات را باز کنید و مثلاً به صورت $a_8 = a_1 + 7d$

بنویسید.

پله اول: با توجه به رابطه $\frac{a_1 + a_3 + a_5}{a_4 + a_6 + a_8} = \frac{4}{7}$ داریم:

$$\frac{a_1 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 4d)}{(a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 7d)} = \frac{4}{7} \Rightarrow 3a_1 + 6d = 3a_1 + 15d \Rightarrow 9a_1 = 9d \Rightarrow a_1 = d$$

$$\Rightarrow \frac{a_5 + a_{11}}{a_{18} + a_{19}} = \frac{(a_1 + 4d) + (a_1 + 10d)}{(a_1 + 17d) + (a_1 + 18d)} = \frac{2a_1 + 14d}{2a_1 + 35d} = \frac{2 \times \frac{7}{3}d + 14d}{2 \times \frac{7}{3}d + 35d} = \frac{8}{17}$$

پله دوم:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۹

$$\begin{cases} a + d = b \\ a + 5d = bq \\ a + 18d = bq^2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 4d = b(q-1) \\ 18d = bq(q^2-1) \end{cases} \xrightarrow{+} 20 = q(q+1) \xrightarrow{q>0} q = 4 \rightarrow 4d = 3b \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{3}{4}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۰

پاسخ تشریحی

ابتدا توجه کنید که چون A نامتناهی است، پس حتماً مجموعه مرجع نیز نامتناهی است.

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گام اول: در ۱، اشتراک یک مجموعه متناهی و یک مجموعه نامتناهی، حتماً متناهی است. متناهی است. $\underline{A} \cap \underline{B} \Rightarrow$ متناهی نامتناهی

گام دوم: طبق گام اول، مجموعه $A \cap B$ متناهی است، پس متمم آن نامتناهی است.

$$(A \cap B)' = \bigcup_{\text{نامتناهی}} - (A \cap B) \Rightarrow \text{نامتناهی است.}$$

پس ۲ جواب است.

$$(3) A' \cap (A \cup B) = \underbrace{(A' \cap A)}_{\emptyset} \cup (A' \cap B) = B \cap A' = B - A = \text{نامتناهی}$$

گام سوم: در خصوص ۳ و ۴ می‌توان گفت:

$$(4) A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A = \text{نامتناهی}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۱

پاسخ تشریحی

گام اول: جمله عمومی دنباله خطی را می‌توان به صورت $t_n = an + b$ در نظر گرفت؛ پس:

$$t_1 = a \times 1 + b \xrightarrow{t_1=10} a + b = 10 \quad (1)$$

$$t_5 = a \times 5 + b \xrightarrow{t_5=20} 5a + b = 20 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} 4a = 10 \Rightarrow a = 2.5 \xrightarrow{(1)} b = 7.5$$

پس جمله عمومی دنباله خطی به صورت $t_n = 2.5n + 7.5$ است.

$$t_n = 2.5n + 7.5 \xrightarrow{n=7} t_7 = \underbrace{2.5 \times 7}_{17.5} + 7.5 = 25$$

گام دوم: جمله هفتم دنباله با جای گذاری $n = 7$ در t_n به دست می‌آید:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۲

پاسخ تشریحی

$$a_{n+1} = \frac{1}{p}(2a_n + 1) \Rightarrow a_{n+1} = a_n + \frac{1}{p} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{p} \quad (1)$$

گام اول: جمله عمومی دنباله را بازنویسی می‌کنیم:

گام دوم: طبق تساوی (۱) هر جمله دنباله (به جز جمله اول) از جمله قبلی‌اش به اندازه مقدار ثابت $\frac{1}{p}$ بیشتر است؛ پس دنباله داده شده یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{p}$ است.

گام سوم: جمله عمومی دنباله حسابی با قدرنسبت $d = \frac{1}{p}$ و جمله اول $a_1 = 3$ را می‌نویسیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow[d=\frac{1}{p}, a_1=3]{} a_n = 3 + (n-1) \times \frac{1}{p}$$

$$\xrightarrow{n=1403} a_{1403} = 3 + (1403-1) \times \frac{1}{p} = 3 + \frac{1402}{p} = 3 + 701 = 704$$

گام چهارم: با جای‌گذاری $n = 1403$ داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۳

پاسخ تشریحی

گام اول: اول نامعادله $2x^2 - x - 1 < 0$ را حل می‌کنیم:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ (2)x^2 & (-1)x & (-1) \end{matrix} < 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{A+B+C=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{C}{A} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 - x - 1$	+	-	+	+

$$\xrightarrow{\text{قسمت‌های منفی را می‌خواهیم}} x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

گام دوم: مجموعه B ، x های عضو A است به طوری که $2x^2 - x - 1 < 0$ (یا به عبارت دیگر، x های عضو A که $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ باشد، پس برای مشخص‌شدن مجموعه B ، باید اشتراک A و بازه $(-\frac{1}{2}, 1)$ را پیدا کنیم.

گام سوم: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

①: $A = \mathbb{Q} \Rightarrow B = \mathbb{Q} \cap (-\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{2}, 1)$ اعداد گویا در بازه

واضح است که تعداد اعداد گویای این بازه، بی‌نهایت است، پس در این صورت B نامتناهی می‌شود.

②: $A = \mathbb{Q}' \Rightarrow B = \mathbb{Q}' \cap (-\frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{2}, 1)$ اعداد گنگ در بازه

واضح است که تعداد اعداد گنگ این بازه هم بی‌نهایت است، پس در این حالت هم B نامتناهی می‌شود.

③: $A = \mathbb{N} \Rightarrow B = \mathbb{N} \cap (-\frac{1}{2}, 1) = \emptyset$

این گزینه هم غیر قابل قبول است، چون در این صورت B تهی می‌شود. (در صورت سؤال گفته B متناهی و ناتهی است).

④: $A = \mathbb{Z} \Rightarrow B = \mathbb{Z} \cap (-\frac{1}{2}, 1) = \{0\}$ ✓

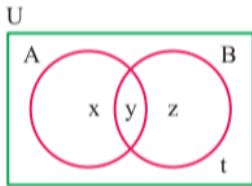
در این حالت B متناهی و ناتهی است، پس جواب ④ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۴

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا یک نمودار ون رسم می‌کنیم:



$$4n(A \cap B) = n(A) = n(B) + 5$$

$\begin{matrix} y & x+y & y+z \end{matrix}$

گام دوم: با توجه به نمودار رسم‌شده داریم:

$$\Rightarrow 4y = x + y = y + z + 5 \Rightarrow \begin{cases} 4y = x + y \Rightarrow x = 3y \\ 4y = y + z + 5 \Rightarrow z = 3y - 5 \end{cases}$$

گام سوم: از طرفی $n(A \cup B) = 30$ است، پس:

$$n(A \cup B) = 30 \xrightarrow{x=3y, z=3y-5} 3y + y + 3y - 5 = 30 \Rightarrow 7y = 35 \Rightarrow y = 5$$

$\begin{matrix} x+y+z \end{matrix}$

گام چهارم: اعضای که به A تعلق دارند و به B تعلق ندارند، همان $A - B$ هستند، پس:

$$n(A - B) = x = 3y = 3 \times 5 = 15$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۵

پاسخ تشریحی

گام اول: این دنباله وقتی هم حسابی و هم هندسی است که ثابت باشد، پس جملات آن همگی با هم برابرند:

$$4 = x + 1 = 2x - y \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3 \\ 2x - y = 4 \xrightarrow{x=3} 6 - y = 4 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \dots$
 $a_1 \quad a_2$
گام دوم: با جای‌گذاری $x = 3$ و $y = 2$ در دنباله $x, y, \dots$ داریم:گام سوم: طبق گفته سؤال، این دنباله هندسی است. با تقسیم جمله دوم به جمله اول، قدرنسبت دنباله برابر $r = \frac{2}{3}$ می‌شود.گام چهارم: حالا برای پیدا کردن جمله بعدی، کافی است جمله دوم (یعنی ۲) را در قدرنسبت ضرب کنیم: $\Rightarrow a_3 = a_2 \times r = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶

پاسخ تشریحی

گام اول: اگر جمله اول و قدرنسبت دنباله هندسی را به ترتیب a_1 و r در نظر بگیریم، با استفاده از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ و

تساوی داده‌شده، داریم:

$$\frac{a_7^2 + a_8^2}{a_7 + a_8} = 3 \Rightarrow \frac{(a_1 r^{6})^2 + (a_1 r^{7})^2}{a_1 r^{6-1} + a_1 r^{7-1}} = 3 \Rightarrow \frac{a_1^2 r^{12} + a_1^2 r^{14}}{a_1 r^5 + a_1 r^6} = 3 \Rightarrow \frac{a_1 r^7 (a_1 r^5 + a_1 r^7)}{a_1 r^5 + a_1 r^6} = 3 \Rightarrow a_1 r^7 = 3 \quad (1)$$

$$\frac{a_7^2}{a_7} + \frac{a_8^2}{a_8} = \frac{(a_1 r^6)^2}{a_1 r^6} + \frac{a_1 r^7}{(a_1 r^7)^2} = \frac{a_1^2 r^{12}}{a_1 r^6} + \frac{a_1 r^7}{a_1^2 r^{14}} = a_1 r^6 + \frac{1}{a_1 r^7} \quad (2)$$

گام دوم: عبارت خواسته‌شده را ساده می‌کنیم.

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{9+1}{3} = \frac{10}{3}$$

گام سوم: از (۱) در عبارت (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۷

پاسخ تشریحی

گام اول: از آن جایی که جمله اول دنباله حسابی (با قدرنسبت d) و دنباله هندسی (با قدرنسبت r) برابر هستند، جملات آنها را به صورت زیر در نظر می گیریم.

دنباله حسابی: $a, a + d, a + 2d, \dots$

دنباله هندسی: $a, ar, ar^2, \dots$

$$a + d = ar \Rightarrow d = a(r - 1) \quad (*)$$

گام دوم: از طرفی، جملات دوم برابر هستند؛ پس:

گام سوم: حالا نسبت جملات سوم این دو دنباله را پیدا می کنیم:

$$\frac{\text{جمله سوم دنباله حسابی}}{\text{جمله سوم دنباله هندسی}} = \frac{a + 2d}{ar^2} \stackrel{(*)}{=} \frac{a + 2(a(r - 1))}{ar^2} = \frac{a + 2ar - 2a}{ar^2} = \frac{2r - 1}{r^2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۸

پاسخ تشریحی

گام اول: جمله عمومی دنباله هندسی را به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ در نظر می گیریم. داریم:

$$\begin{cases} a_1 = a_1 q^1 = 4\sqrt{2} \\ a_7 = a_1 q^6 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم می کنیم}} \frac{a_7}{a_1} = q^6 = -\frac{2}{4\sqrt{2}} \Rightarrow q = -\sqrt{2}$$

گام دوم: مقدار q به دست آمده را در a_7 جای گذاری می کنیم تا a_1 را به دست آوریم:

$$a_1 q^6 = -2 \Rightarrow a_1 = \frac{-2}{(-\sqrt{2})^6} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

گام سوم: حالا مقدار جمله چهارم این دنباله را محاسبه می کنیم:

$$a_4 = a_1 q^3 = -\frac{1}{4} (-\sqrt{2})^3 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{0.5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۹

راه حل اول:

نکته: جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n - 1)d$ است.

می خواهیم بین دو عدد ۵ و ۲۵ سه واسطه حسابی درج کنیم. پس می توان نوشت:

اگر دنباله را t_n بنامیم، داریم:

$$t_5 = 25 \Rightarrow t_1 + 4d = 25 \Rightarrow 5 + 4d = 25 \Rightarrow 4d = 20 \Rightarrow d = 5$$

پس دنباله به صورت ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵ است که جمله وسط آن ۱۵ می باشد.

دقت کنید که اگر جمله اول را ۲۵ و جمله پنجم را ۵ در نظر بگیریم به جواب مشابه می رسیم.

راه حل دوم:

نکته: b را واسطه حسابی بین دو عدد a و c گوئیم، هرگاه $b = \frac{a+c}{2}$

جمله وسط در واقع واسطه حسابی دو عدد ۵ و ۲۵ است. پس با توجه به نکته فوق داریم:

$$\text{جمله وسط} = \frac{5 + 25}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

(گزینۀ دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۰

از اینکه A متناهی و $A \cup B$ نامتناهی است نتیجه می‌شود B و A' نامتناهی می‌باشند.

بررسی گزینه‌ها:

- ۱ B نامتناهی و A متناهی است، بنابراین $B - A$ یا همان $B \cap A'$ نامتناهی است. پس گزینه ۱ درست است.
- ۲ B' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، در نتیجه $A \cup B'$ نیز ممکن است نامتناهی باشد. پس گزینه ۲ نادرست است.
- ۳ A متناهی است، در نتیجه $B \cap A$ یا همان $B - A'$ متناهی است. بنابراین گزینه ۳ درست است.
- ۴ A' نامتناهی است، بنابراین $A' \cup B'$ نیز نامتناهی است. پس گزینه ۴ درست است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۱

دسته‌بندی اعداد به صورت مقابل است: $(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جمله آخر، دسته n ام، n^2 است. پس جمله آخر دسته دهم، $10^2 = 100$ و جمله آخر دسته نهم، $9^2 = 81$ می‌باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت جمله اول دسته دهم ۸۲ است و خواسته مسئله $100 - 82 = 18$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۲

تو این سؤال می‌خواهد بدونه تعداد مربع‌های واحد شکل سی‌ام چند تا بیش‌تر از تعداد مربع‌های واحد شکل بیست‌وششم است. خب برای اینکه تعداد مربع‌های هر شکل و رابطه بین تعداد مربع‌های هر شکل و شماره شکل رو به‌دست بیاریم از جدول زیر کمک می‌گیریم.

n	۱	۲	۳	۴
شماره شکل ()	۱	۲	۳	۴
تعداد مربع‌های هر شکل	۱	۱+۲	۱+۲+۳	۱+۲+۳+۴

که تعداد مربع‌های هر شکل از جمع اعداد ۱ تا n به‌دست می‌اد.

یعنی پس شکل n ام دارای $1+2+3+4+\dots+n$ مربع هست که مجموع اعداد از ۱ تا n از رابطه $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ به‌دست می‌اد.

که تعداد مربع‌های شکل ۳۰ ام و تعداد مربع‌های شکل ۲۶ ام از رابطه بالا به‌صورت زیر به‌دست می‌اد:

$$a_{30} = \frac{30(30+1)}{2} = 15 \times 31 = 465$$

خواسته سؤال اختلاف a_{30} و a_{26} هست که میشه:

$$a_{26} = \frac{26(26+1)}{2} = 13 \times 27 = 351$$

$$a_{30} - a_{26} = 465 - 351 = 114$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۳

نکته: اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نکته می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) + n(A \cap B) - n(A) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B) - n(A) = n(B)$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۴

نکته: اگر b واسطه حسابی a و c باشد، داریم: $b = \frac{a+c}{2}$

$$\frac{a}{2} = \frac{a+a+4}{2} \Rightarrow a = 2a+4 \Rightarrow a = -4$$

مطابق نکته می‌توان نوشت:

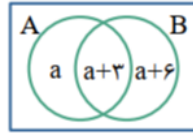
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

اگر تعداد اعضای $A - B$ را a بنامیم، خواهیم داشت:

۳۵

$$3a + 9 = 33 \Rightarrow 3a = 24 \Rightarrow a = 8$$

$$n(A) = 2a + 3 = 19$$



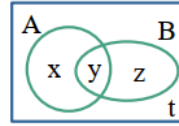
بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$Z + t$ = تعداد افرادی که از دستگاه A استفاده نکرده‌اند

$X + t$ = تعداد افرادی که از دستگاه B استفاده نکرده‌اند

t = تعداد افرادی که از دو دستگاه استفاده نکرده‌اند



خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} (Z+t) - t &= 10 \Rightarrow Z = 10 \\ (X+t) - t &= 18 \Rightarrow X = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X + Z = 28$$

می‌دانیم $x + y + z + t = 40$ است.

بنابراین:

$$y + t = 12 \Rightarrow t = 12 - y$$

$$12 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 12$$

چون $t \geq 0$ است، خواهیم داشت:

حداکثر تعداد افرادی که از دو دستگاه استفاده کرده‌اند ۱۲ نفر است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$$

$$a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 2a_5$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 9a_5 = 531 \Rightarrow a_5 = 59$$

$$a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2} = \frac{59 + 111}{2} = \frac{170}{2} = 85$$

از طرفی:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

الگوی خطی همان دنباله حسابی است.

۳۸

$$\left. \begin{aligned} a_f &= a_1 + rd \\ b_f &= b_1 + rd' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{a_f - b_f}_r = \underbrace{a_1 - b_1}_{-1} + r(d - d') \Rightarrow d - d' = 1$$

$$b_f - a_f = b_1 + d' - (a_1 + d) = (b_1 - a_1) + (d' - d) = 1 + (-1) = 0$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$a_n : a, a+d, a+rd$$

$$b_n : d, d+a, d+ra$$

جملات دنباله حسابی:

جملات دنباله هندسی:

دنباله b_n نیز یک دنباله حسابی با قدرنسبت a است و چون یک دنباله هندسی نیز می‌باشد، پس دنباله ثابت است.

$$a_n : 0, d, 2d \text{ مجموع جملات } 0 + d + 2d = 6 \Rightarrow d = 2$$

در نتیجه: $a = 0$ خواهیم داشت:

$$b_n : d, d, d \Rightarrow b_n : 2, 2, 2 \Rightarrow \text{حاصل ضرب جملات} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه $U - A$ را متمم A می‌نامیم.

۴۰

$$U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 4\} = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A' = \{-2, -1, 0, 4\}$$

پس A' دارای ۴ عضو است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۱

نکته: هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.
نکته: در هر دنباله، با داشتن جمله عمومی الگو (جمله n ام)، می‌توان تمامی جملات دنباله را به دست آورد. ($n \geq 1$)
طبق نکات بالا، با داشتن جمله عمومی دنباله b_n ، ابتدا سومین جمله آن، یعنی b_3 را حساب می‌کنیم:

$$b_3 = (-3)^3 - 7(3) = -27 - 21 = -48$$

حال جمله عمومی دنباله a_n را با -48 برابر قرار می‌دهیم:

$$a_n = -48 \Rightarrow -5n + 22 = -48 \Rightarrow -5n = -70 \Rightarrow n = 14$$

پس $k = 14$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۲

جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $a_n = dn + b$ است، بنابراین در جمله عمومی داده شده باید ضریب n^2 برابر صفر باشد:

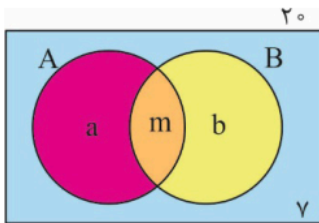
$$a_3 - 10 = 0 \rightarrow a_3 = 10 \rightarrow a_n = a_3 n - 5 \xrightarrow{n=2} a_2 = 2a_3 - 5 \rightarrow a_2 = 5$$

$$\begin{cases} a_3 = 10 \\ a_2 = 5 \end{cases} \rightarrow d = a_3 - a_2 = 5 \rightarrow a_1 - 2a_3 = (a_3 + 7d) - 2a_3 = 7d - a_3 = 35 - 10 = 25$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۳

به نمودار ون توجه کنید



$$a + m + b = 20 - 7 = 13 \quad (1)$$

$$(a + m) - (m + b) = 7 \quad (2)$$

$$\Rightarrow a - b = 7 \Rightarrow b = a - 7$$

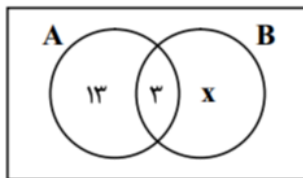
$$(1), (2) \Rightarrow a + m + a - 7 = 13 \Rightarrow 2(a + m) = 20 + 7 \Rightarrow n(A) = a + m = 10 + \frac{m}{2}$$

به ازای $m = 0$ حداقل $n(A)$ برابر ۱۰ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۴

ابتدا داریم:



$$n(A \cap B') = n(A - B) = 13$$

حال با رسم نمودار ون و با فرض $n(B - A) = x$ داریم:

$$n(A \cup B) = 13 + 3 + x$$

$$\Rightarrow 27 = 16 + x \Rightarrow x = 11$$

بنابراین:

$$n(B - A) = 11$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۵

اگر دنباله مورد نظر را a_n با قدرنسبت d بنامیم، آنگاه داریم:

$$a_7 + a_{21} = a_{11} + 37 \Rightarrow a_1 + 6d + a_1 + 20d = a_1 + 10d + 37$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 26d = a_1 + 10d + 37 \Rightarrow a_1 + 16d = 37 \Rightarrow a_{17} = 37$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۶

نکته: جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن t_1 جمله اول و r قدرنسبت می باشد. ($t_1, r \neq 0$)

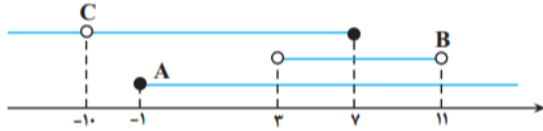
$$\frac{t_8}{t_4} = \frac{t_1 r^7}{t_1 r^3} = r^4 \Rightarrow \frac{192}{12} = r^4 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

با توجه به نکته و فرض سؤال داریم:

$$t_8 = t_4 \times r \Rightarrow t_8 = 12 \times 2 = 24$$

طبق فرض جملات مثبت اند، پس فقط $r = 2$ قابل قبول است، بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



$$= C - (A \cup B) = (-1, -1)$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\text{الگوخطی} \Rightarrow a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$$

$$\text{الگوخطی} \Rightarrow a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1 \Rightarrow (4n+1) + (4n-3) = 12n - 2 \xrightarrow{n=11} 132 - 2 = 130$$

یادآوری: جمله عمومی الگوی خطی از رابطه $a_n = a + d(n-1)$ بدست می آید که a همان جمله اول و d همان فاصله ثابت میان جملات است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۸

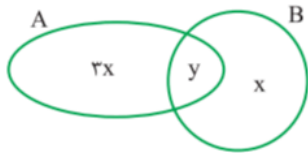
$$d = \frac{-13}{4} + 4 = \frac{3}{4} \quad a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + (n-1)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}n - \frac{19}{4} \quad a_{13} = \frac{3}{4}(13) - \frac{19}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$a_{21} = \frac{3}{4}(21) - \frac{19}{4} = \frac{44}{4} = 11 \quad a_{49} = \frac{3}{4}(49) - \frac{19}{4} = \frac{128}{4} = 32 \Rightarrow \frac{a_{21} + a_{49}}{2} = \frac{11 + 32}{2} = \frac{43}{2} = 21.5 \Rightarrow 21.5 - 5 = 16.5$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴۹

ابتدا جمله عمومی دنباله را می نویسیم:



پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به معلومات مسئله، یک نمودار ون برای این دو مجموعه رسم می کنیم:

دقت کنید که $n(B-A)$ را x گرفته ایم، پس $n(A-B)$ برابر $3x$ می شود.

گام دوم: تعداد اعضای مجموعه های A و $A \cup B$ را داریم و می نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = 22 \Rightarrow 3x + y = 22 \\ n(A \cup B) = 28 \Rightarrow 4x + y = 28 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = 6 \text{ و } y = 4$$

گام سوم: در نتیجه تعداد اعضای مجموعه B برابر $x + y = 10$ خواهد بود.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۰

$$n(A) - n(B) = 10$$

پاسخ تشریحی گام اول: در ابتدای مسئله می دانیم که:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22$$

گام دوم: اجتماع دو مجموعه، ۲۲ عضو دارد، پس می نویسیم:

و به جای $n(A)$ عبارت $n(B) + 10$ را می گذاریم، زیرا $n(B)$ را می خواهیم:

$$n(B) + 10 + n(B) - n(A \cap B) = 22 \Rightarrow 2n(B) = 12 + n(A \cap B) \Rightarrow n(B) = 6 + \frac{n(A \cap B)}{2}$$

گام سوم: مجموعه B زمانی کمترین تعداد اعضای خود را دارد که A و B جدا از هم باشند ($A \cap B = \emptyset$). پس $n(A \cap B) = 0$ است و داریم:

$$n(B) \geq 6$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۱

۵۲

پاسخ تشریحی

گام اول: شکل n ام از یک الگوی مربعی مرتبه $n+1$ و یک الگوی مثلثی مرتبه n

تشکیل شده است:

گام دوم: پس تعداد نقاط شکل n ام (جمله عمومی دنباله) برابر است با:

$$t_n = \underbrace{(n+1)^2}_{\text{الگوی مربعی}} + \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{الگوی مثلثی از } n \text{ تا } 1} \Rightarrow t_n = n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \Rightarrow t_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1 = n^2 + 8n + 1 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 = \frac{11}{2}n \xrightarrow{\div \frac{n}{2}} n = 11$$

گام سوم: این رابطه را باید برابر $n^2 + 8n + 1$ قرار دهیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۳

پاسخ تشریحی

گام اول: الگو درجه دوم است، پس فرمول (جمله عمومی) آن را $t_n = an^2 + bn + c$ در نظر می گیریم.گام دوم: t_1 ، t_2 و t_4 معلوم اند:

$$\begin{aligned} t_1 = 2 &\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 16a + 4b + c = 29 \end{cases} \\ t_2 = 7 &\Rightarrow \\ t_4 = 29 &\Rightarrow \end{aligned}$$

گام سوم: برای حل این دستگاه سه معادله - سه مجهول، کافی است از معادله اول، c را برحسب a و b به دست آوریم و در دو معادله دیگر

جای گذاری کنیم:

$$c = 2 - a - b \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 2 - a - b = 7 \\ 16a + 4b + 2 - a - b = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 5 \\ 15a + 3b = 27 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 2, b = -1 \xrightarrow{c=2-a-b} c = 1 \Rightarrow t_n = 2n^2 - n + 1 = n(2n-1) + 1$$

$$t_{15} + t_{16} = 436 + 497 = 933$$

گام چهارم: مجموع جملات پانزدهم و شانزدهم را حساب می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۴

پاسخ تشریحی

گام اول: الگو خطی است، پس جمله عمومی آن را $t_n = \alpha n + \beta$ در نظر می گیریم.گام دوم: t_7 و $t_{10} + t_7$ را داریم:

$$\begin{aligned} t_7 = 22 &\Rightarrow \begin{cases} 7\alpha + \beta = 22 \\ 17\alpha + 2\beta = 121 \end{cases} \\ t_7 + t_{10} = 121 &\Rightarrow \end{aligned}$$

گام سوم: حل دستگاه را انجام می دهیم:

$$(17\alpha + 2\beta) - 2(7\alpha + \beta) = 121 - 2(22) \Rightarrow 3\alpha = 77 \Rightarrow \alpha = 7 \xrightarrow{7\alpha + \beta = 22} \beta = 1 \Rightarrow t_n = 7n + 1$$

$$t_1 = 7(1) + 1 = 8$$

گام چهارم: جمله اول (t_1) را حساب می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

پاسخ تشریحی روش اول:

۵۵

گام اول: دنباله اختلاف بزرگترین عدد و کوچکترین عدد هستیم. پس اختلافها را حساب می‌کنیم و به ترتیب می‌نویسیم: $0, 3, 6, 9, \dots$

گام دوم: الگوی اختلافهای مورد نظر $t_n = 3(n-1)$ است. پس در دسته دهم، اختلاف بزرگترین و کوچکترین عدد برابر $t_{10} = 3 \times 9 = 27$ است.

روش دوم:

گام اول: تعداد اعضای هر دسته برابر شماره آن دسته است. پس تا دسته نهم $\frac{9 \times 10}{2} = 45$ جمله از جملههای دنباله $a_n = 3n - 2$ را مصرف کرده‌ایم. در نتیجه عدد اول دسته دهم ۴۶امین جمله این دنباله یعنی $a_{46} = 3 \times 46 - 2 = 136$ است.

گام دوم: تا دسته دهم $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ جمله از جملههای دنباله $a_n = 3n - 2$ را مصرف می‌کنیم، در نتیجه عدد آخر دسته دهم ۵۵امین جمله دنباله یعنی $a_{55} = 3 \times 55 - 2 = 163$ است.

گام سوم: اختلاف عدد اول و آخر دسته دهم برابر $163 - 136 = 27$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

پاسخ تشریحی گام اول: ابتدا از روی ویژگی سه جمله متوالی دنباله حسابی، مقدار a را حساب می‌کنیم:

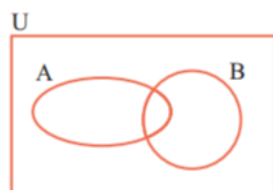
۵۶

$$\Rightarrow a + 4a - 1 = 2(2a + 1) \Rightarrow 5a - 1 = 4a + 2 \Rightarrow a = 3$$

$$3 \times (3 + b) = 6^2 \Rightarrow 3 + b = 12 \Rightarrow b = 9$$

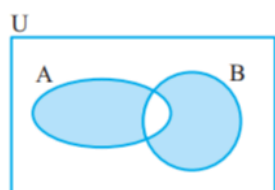
گام دوم: دنباله $3, 6, 3 + b$ باید هندسی باشد، داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



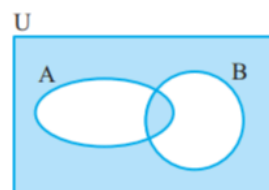
پاسخ تشریحی گام اول: یک نمودار ون در حالت کلی برای مسئله رسم می‌کنیم:

و هر کدام از مجموعه‌های مورد نظر صورت سؤال را در آن مشخص می‌کنیم.

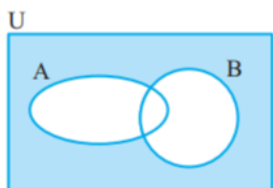
گام دوم: در این نمودار مجموعه $[(A - B) \cup (B - A)]'$ را به روش زیر مشخص می‌کنیم:

$$(A - B) \cup (B - A)$$

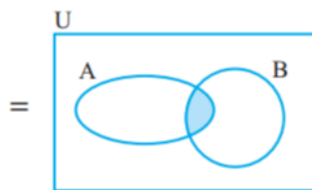
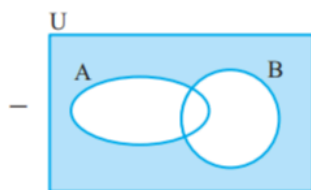
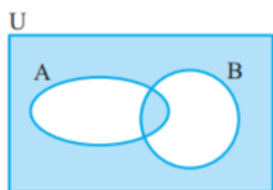
متکم



$$[(A - B) \cup (B - A)]'$$

گام سوم: طبق درس‌نامه مجموعه $(A \cup B)'$ مطابق نمودار زیر است:

گام چهارم: اگر مجموعه به‌دست آمده در گام سوم را از مجموعه به‌دست آمده در گام دوم برداریم (یعنی اعضایش را از آن حذف کنیم) به مجموعه

می‌رسیم: $A \cap B$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۸

گام اول: از آن جایی که مجموعه‌های A و B در یک مجموعه مرجع تعریف شده‌اند، با توجه به این که A مجموعه‌ای نامتناهی است، مجموعه مرجع نیز نامتناهی می‌باشد. (مجموعه مرجع: U)

گام دوم: هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): B متناهی است و $B' = U - B$ است و چون U مجموعه‌ای نامتناهی است، B' مجموعه‌ای نامتناهی می‌شود.

گزینه (۲): A نامتناهی است و $A' = U - A$ است، اما تفاضل دو مجموعه نامتناهی را نمی‌توان گفت که لزوماً یک مجموعه متناهی می‌شود. مثلاً اگر فرض کنیم $U = \mathbb{R}$ و A مجموعه اعداد حقیقی نامثبت باشد، در این صورت A' مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌شود که نامتناهی است.

گزینه (۳): اشتراک یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای متناهی است.

گزینه (۴): اجتماع یک مجموعه متناهی و یک مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.

بنابراین گزینه (۲) جواب است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۵۹

گام اول: ابتدا جمله اول و قدرنسبت دنباله t_n را پیدا می‌کنیم:

$$t_n = 3^{n-2} \Rightarrow t_1 = 3^{1-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}, \quad t_2 = 3^{2-2} = 3^0 = 1$$

$$\Rightarrow \text{قدرنسبت} = r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

گام دوم: پس در دنباله جدید، جمله اول $a_1 = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ و قدرنسبت برابر با $q = 2$ است. جمله عمومی دنباله هندسی جدید برابر است با $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$.

گام سوم: بنابراین جمله چهارم دنباله جدید برابر با $a_4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۰

از فرمول واسطه هندسی استفاده می‌کنیم:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \xrightarrow[r=-2]{b=48, a=0/75} (-2)^{n+1} = \frac{48}{0/75} \Rightarrow (-2)^{n+1} = \frac{16}{48} \times \frac{4}{3} = 2^6$$

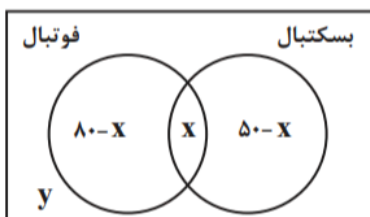
$$\Rightarrow n+1=6 \Rightarrow n=5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۶۱

از نمودار ون زیر استفاده می‌کنیم که در آن x تعداد افرادی است که هم فوتبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند. y هم تعداد افرادی است که هیچ کدام را بازی نمی‌کنند.

حال داریم:



$$80 - x + x + 50 - x + y = 260 \Rightarrow y - x = 130 \quad (1)$$

$$y = 2(80 - x) \Rightarrow y + 2x = 160 \quad (2)$$

هم‌چنین:

از (۱) و (۲) به دست می‌آید:

 $x = 10$ و $y = 140$. پس تعداد دانش‌آموزانی که فقط بسکتبال بازی می‌کنند، برابر ۴۰ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

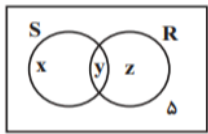
۶۲

تعداد نقاط شکل n ام برابر $a_n = n^2 + 4n$ می‌باشد. پس داریم:

$$n^2 + 4n = 192 \Rightarrow n^2 + 4n - 192 = 0 \Rightarrow (n - 12)(n + 16) = 0 \Rightarrow n = 12$$

در شکل دوازدهم ۱۹۲ نقطه داریم.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)



$$x + y + z + 5 = 40 \rightarrow x + y + z = 35 \quad (1)$$

$$22 \rightarrow x + z = 22 \quad (2)$$

$$15 \rightarrow z + y = 15 \quad (3)$$

 S = گروه سرود R = گروه روزنامه‌دیواری

از جایگذاری رابطه ۳ در رابطه ۱ داریم:

$$x + (y + z) = 35 \rightarrow x + 15 = 35 \rightarrow x = 20 \quad (2) \rightarrow 20 + z = 22 \rightarrow z = 2 \quad (3) \rightarrow 2 + y = 15 \rightarrow y = 13$$

۱۳ نفر در هر دو گروه سرود و روزنامه دیواری عضو هستند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۴

این دنباله، یک دنباله حسابی است:

$$4 + 2\sqrt{3}, 4, 4 - 2\sqrt{3}, \dots \rightarrow d = -2\sqrt{3}$$

$$a_1 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \text{مجموع جملات ردیف زوج در ده جمله اول}$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \text{مجموع جملات ردیف فرد در ده جمله دوم}$$

تفریق

$$\Rightarrow a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + a_6 - a_5 + a_8 - a_7 + a_{10} - a_9 =$$

$$(2 - 1)d + (4 - 3)d + (6 - 5)d + (8 - 7)d + (10 - 9)d = -45d = 90\sqrt{3}$$

(دیار ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۵

$$t_2 = \frac{2 + 2(2)}{3} = 2$$

$$t_{47} = \frac{2 + 2(47)}{3} = \frac{96}{3} = 32$$

باید بین ۲ و ۳۲ سه واسطه هندسی درج کنیم. پس $a_1 = 2$ و $a_\Delta = 32$:

$$a_\Delta = a_1 q^f \Rightarrow 32 = 2q^f \Rightarrow q = \pm 2$$

پس دنباله هندسی به صورت ۲ و ۱۶ و ۸ و ۴ و ۲ می‌باشد:

$$t_n = 28 \Rightarrow \frac{2 + 2n}{3} = 28 \Rightarrow 2n + 2 = 84 \Rightarrow n = 41$$

$$28 = 2 + 8 + 16 = \text{مجموع سه واسطه}$$

(دیار ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۶

تمام گزینه‌ها به جز گزینه «۳» درست هستند. در گزینه «۳»، اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B متناهی باشد، چون $A \subset (A \cup B)$ است، یعنی تمام عضوهای مجموعه نامتناهی A در مجموعه $A \cup B$ هستند، پس مجموعه $A \cup B$ نیز نامتناهی است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۷

تعداد نقاط هر شکل به صورت زیر است:

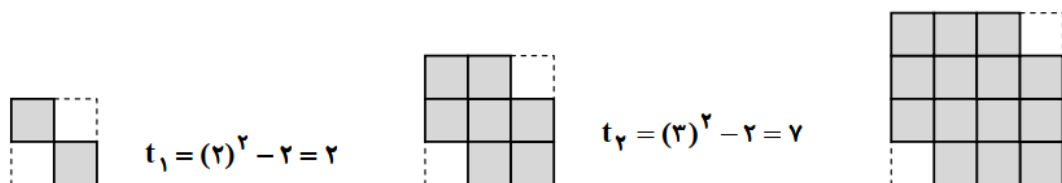
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ می‌باشد و می‌توان نوشت:}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1830 \Rightarrow n(n+1) = 3660 = 60 \times 61 \Rightarrow n = 60$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶۸

نکته: در هر الگو، با پیدا کردن جمله عمومی الگو (جمله n ام)، می توان تمامی جملات دنباله را به دست آورد. ($n \geq 1$)
در هر مرحله، می توان با اضافه کردن ۲ مربع واحد مطابق شکل زیر، الگو را به مربعی بزرگ تبدیل کرد و به راحتی جمله عمومی این دنباله غیرخطی را نوشت.



$$t_1 = (2)^2 - 2 = 2$$

$$t_2 = (3)^2 - 2 = 7$$

$$t_3 = (4)^2 - 2 = 14$$

پس جمله عمومی الگوی غیرخطی t_n به صورت روبه رو است:

$$t_n = (n+1)^2 - 2$$

جملات هفتم و دهم دنباله را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} t_{10} = 11^2 - 2 = 119 \\ t_7 = 8^2 - 2 = 62 \end{cases}$$

اختلاف این دو جمله برابر است با:

$$t_{10} - t_7 = 119 - 62 = 57$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$\frac{a_2 + a_5}{a_5 + a_8} = 8 \Rightarrow \frac{aq + aq^4}{aq^4 + aq^7} = 8 \Rightarrow \frac{aq(1+q^3)}{aq^4(1+q^3)} = 8 \Rightarrow \frac{1}{q^3} = 8 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

می دانیم:

۶۹

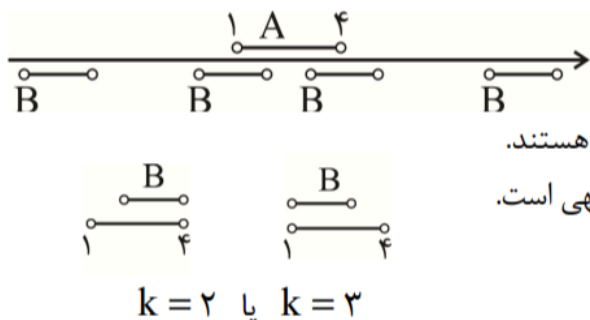
$$a_4 = 1 \Rightarrow a_6 = a_4 \times q^2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

از طرفی:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

بازه $A = (1, 4)$ و بازه B به طول ۲ را روی محور ببینید.

۷۰



در تمام این حالت ها هم $A-B$ و هم $B-A$ بازه های باز و نامتناهی هستند.
اما در حالتی که دو بازه نسبت به هم به صورت روبه رو باشند، یکی از تفاضل ها تهی است.
پس باید $1 \leq k-1$ و $k+1 \leq 4$ باشد.

یعنی $2 \leq k \leq 3$ که در بین جواب های k ، دو مقدار طبیعی داریم:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)